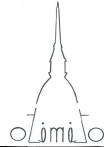


# Simulazione Olimato GARA A SQUADRE

2 maggio 2013



## ISTRUZIONI

- Ogni problema ha una risposta data da un numero intero di quattro cifre decimali. Se ha meno di quattro cifre, si aggiungano degli zeri davanti.
- Scadenze: 10 minuti per il problema jolly, 120 minuti per il termine della gara.

«Qual è il parassita più resistente? Un'idea. Resistente, altamente contagiosa».

TESTO DI FRANCESCO BALLINI ED EMANUELE TRON

## 1. CONCETTI RADICALI

«Lo so cos'è questa. Ne ho già vista una uguale, molti anni fa. Apparteneva a un uomo che ho conosciuto in un sogno quasi dimenticato. Un uomo posseduto da alcuni concetti radicali» dice il vecchio giapponese seduto davanti a Dom Cobb, guardando una trottola, «come il fatto che, per un polinomio a coefficienti interi  $p(x)$  con coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1, il minimo valore della somma dei valori assoluti dei coefficienti di  $p(x)(1+x+x^2+\dots+x^{2013})$  è 2013, ma non è così». Qual è il vero valore?

## 2. UN SEGRETO BEN CUSTODITO

Dom e Arthur devono aprire la cassaforte che contiene l'informazione segreta di Saito: per accedervi serve conoscere il massimo numero di punti interni o sul bordo di una circonferenza di raggio unitario tali che la distanza tra due punti qualsiasi sia almeno 1. Con un po' di ragionamento non sarà difficile: qual è questo numero?

## 3. DREAM IS COLLAPSING

Dopo aver aperto la cassaforte il sogno ha cominciato a sgretolarsi, ma Dom è riuscito a leggere quel che gli serviva: è la somma di tutti gli interi  $n$  tali che la somma delle cifre decimali di  $n^2$  è  $n$  stesso. Che numero dovrà ricordare all'uscita dal sogno?

## 4. INNESTO PARTICOLARE

Dom e la sua squadra hanno fallito e sono stati scoperti da Saito, che adesso propone loro uno scambio. «Che cosa vuole da noi?». «Un innesto. Devo impiantare il valore della somma  $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{23} - b_{23}|$  dove  $\{a_1, a_2, \dots, a_{23}, b_1, \dots, b_{23}\} = \{1, 2, \dots, 46\}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{23}$  e  $b_1 > b_2 > \dots > b_{23}$ . È possibile?». «Assolutamente no» replica Arthur, «prima dobbiamo sapere quanto vale!».

## 5. CERCASI ARCHITETTO

Dom è a Parigi in cerca di un nuovo architetto. Per capire se Ariadne è abbastanza brava, la sottopone a un duro esame matematico. «Ti dò due minuti per calcolare quanti sono i sottoinsiemi non vuoti di  $\{1, 2, \dots, 18\}$  che non contengono interi consecutivi». Cosa deve rispondergli Ariadne per passare l'esame?

## 6. IL TEMPO DEI SOGNI

L'addestramento di Ariadne prosegue: «Un minuto nel mondo reale è  $n$  minuti in sogno, dove  $n$  è il numero per cui il prodotto  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  può raggiungere il massimo e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono interi positivi che soddisfano  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2013$  » spiega Arthur. «Ma allora quant'è  $n$ ?».

## 7. PRIMO LABIRINTO

È l'ora della costruzione di un labirinto. Per cominciare da qualcosa di semplice, Ariadne ne immagina uno la cui pianta è un triangolo  $T$  di lati  $10u, 11u, 12u$  e area  $1320u^3$ , dove  $u$  è una certa unità. Questo triangolo ha poi sul suo perimetro tre punti che sono i vertici di un altro triangolo non degenere. In quanti modi distinti può scegliere questi tre punti in modo che dividano i lati di  $T$  in segmenti di lunghezze multiple di  $u$  e l'area del triangolo che formano sia un multiplo intero di  $u^3$ ?

## 8. LADRO PROBABILISTA

Eames è un abile falsario, ma conosce anche bene le leggi della probabilità. Prima di parlare di affari con Dom lo sfida: «Se lanciassi una moneta 6666 volte segnando in sequenza i risultati, quante sottostringhe "croce-testa-croce" ti aspetteresti di avere?».

## 9. TRUCCHETTI DA ARCHITETTI

Arthur sta istruendo Ariadne sulla costruzione di una scala di Penrose. «Dovrai imparare alcuni trucchetti se vuoi costruire molti livelli in un sogno. Puoi creare al più un numero di livelli pari al massimo comun divisore di tutti i numeri della forma  $a^{2013} - a$  con  $a$  numero naturale». Quanti

livelli si possono costruire al massimo?

### 10. LABIRINTO TRIANGOLARE

Ariadne ha perfezionato la sua idea del labirinto, ma evita di rivelarla a Dom. Vuole costruire un triangolo  $T_0$ , poi il triangolo  $T_1$  che ha come vertici i piedi delle altezze di  $T_0$ , e continuare così costruendo i triangoli  $T_0, T_1, \dots, T_n$ , dove i vertici di  $T_{k+1}$  sono i piedi delle altezze di  $T_k$ . Se nessun angolo di  $T_0$  è  $60^\circ$ , qual è il prodotto delle ampiezze in gradi dell'angolo più grande e del più piccolo di  $T_0$ , sapendo che i triangoli sono tutti acutangoli e  $n$  è il massimo possibile?

### 11. UN LABIRINTO MIGLIORE

Arthur è molto soddisfatto del progetto di Ariadne, ma le propone una modifica. «Prendi sempre un triangolo  $ABC$ , di lati 3, 7 e 8. Costruisci il triangolo  $T$  con vertici i centri delle circonferenze esscritte (ovvero  $I_A$  è il centro della circonferenza tangente alle rette  $AB, AC$  ed esternamente a  $BC$ , e similmente per  $I_B$  e  $I_C$ ). Costruisci ora il triangolo che ha come vertici i simmetrici dell'incentro di  $ABC$  rispetto ai punti medi dei lati di  $T$ : qual è il rapporto tra l'area di questo triangolo e l'area di  $ABC$ ?»

### 12. SOGNO CONDIVISO

L'apparecchiatura per il sogno condiviso ha una struttura piuttosto complessa: geometricamente è un parallelepipedo  $12 \times 15 \times 20$  suddiviso in cubetti  $1 \times 1 \times 1$ ; oltre al bottone sopra, c'è un cavo diritto collega due vertici opposti. Calcolare per quanti cubetti il cavo passa strettamente al loro interno.

### 13. IMPREVISTI

Quando entrano nel sogno, Dom e i suoi compagni scoprono degli elementi che non erano nel progetto! A parte una locomotiva vagante nel centro città, trovano un solido formato da due tetraedri incollati su una faccia; una pulce salta tra vertici adiacenti lungo gli spigoli del solido, partendo da un vertice con tre spigoli. Yusuf il chimico commenta: «Be', ha più probabilità lei di tornare al vertice di partenza dopo 2013 salti che noi di riuscire in questa missione!». Dopo averlo fulminato con lo sguardo, Eames si chiede: «Già, chissà qual è questa probabilità...». Dare nell'ordine le prime quattro cifre decimali dopo la virgola.

### 14. INTERROGATORIO

Fischer Jr. e Eames travestito da Browning si ritrovano prigionieri. Eames tenta di far rivelare a Fischer una sequenza di numeri, che però gli risponde di non avere nessuna combinazione. «Forse te l'ha data, ma tu non sapevi che fosse una combinazione» suggerisce Eames. «Sì, in effetti una volta mi chiese quale sia il più piccolo  $n \geq 2013$  tale che  $n$  divide l' $n$ -esimo numero di Fibonacci, però non seppi cosa rispondergli... che numero è, zio Peter?».

### 15. 528491

Nonostante il tentativo infruttuoso di Eames, dopo aver torchiato Fischer, Dom è venuto a conoscenza di un numero, 528491, che si rivela essere inutile. «Però», pensa, «se faccio la media del numero di punti fissi di ciascuna permutazione su tutte le permutazioni di 528491 elementi potrebbe saltare fuori qualcosa!». Qual è il numero che Dom ottiene?

### 16. MISTER CHARLES

Dom cerca di guadagnare la fiducia di Fischer spacciandosi per Mr. Charles e rivelandogli che sta sognando: gli fa credere che vi siano altri estrattori che stanno cercando di prelevargli dalla mente informazioni sensibili, in particolare il valore di  $AI \cdot BI \cdot CI$ , quando  $ABC$  è un triangolo di incentro  $I$  e lati di lunghezze 14, 30 e 40. Quale è dunque questa informazione sensibile?

### 17. LA STANZA NUMERO...

«Qual è il numero, signor Fischer? Provi a recuperarlo per me, è estremamente importante» chiede Dom per sapere il numero della camera in cui devono andare. «Purtroppo non lo ricordo» risponde

Fischer, «ricordo solo che è definito così: ci sono  $n$  pile da una moneta e due giocatori che muovono alternatamente. B può togliere una moneta o unificare un numero a piacere di pile, A può togliere una moneta da un numero intero positivo di colonne a sua scelta, e perde chi non può più muovere. Sapendo che  $n < 100$ , che inizia B e che A ha una strategia vincente, il numero della stanza è la somma di tutti i valori di  $n$  per cui questa situazione si verifica». In che stanza dovranno andare Dom e Fischer?

### 18. LA STANZA DI SOTTO

Anche Arthur deve piazzare dell'esplosivo nella camera esattamente sotto quella che ha scelto Fischer. Anche lui, però, ha scarse informazioni: della seconda parte del numero che ha detto Fischer sotto minaccia, ricorda solo che è il minimo numero di scambi (trasposizioni) necessari per passare da  $\{4, 8, \dots, 56, 1, 5, \dots, 57, 2, 6, \dots, 58, 3, 7, \dots, 59\}$  a  $\{1, 2, \dots, 59\}$ . Qual è il numero di stanza di cui ha bisogno Arthur?

### 19. CALCIO

Per svegliare gli altri membri della squadra, Arthur ha bisogno di una perfetta sincronizzazione. Si accorda con gli altri membri della squadra per dar loro il “calcio” esattamente dopo  $t$  minuti del loro tempo, dove  $t$  è il più grande intero positivo per cui  $t$  divide  $a^{t+1} - a$  per ogni  $a$  intero. Quanti minuti ha a disposizione la squadra prima che Arthur li svegli?

### 20. FORTEZZA INACCESSIBILE

La fortezza in cui devono entrare i nostri ha 2013 finestre e  $s$  torri di sorveglianza. Date 2013 sfere nello spazio che lo dividono in regioni, consideriamo due regioni adiacenti se hanno più di un punto in comune;  $s$  è il massimo valore, al variare della posizione delle sfere, del minimo numero di colori che servono per colorare queste regioni in modo che per ogni coppia di regioni adiacenti, le due regioni siano colorate con colori diversi. Quante torri di sorveglianza ha la fortezza?

### 21. OCCHIO ALLA GUARDIA

Nella fortezza vi sono ben 2013 guardie, e due tipi di guardie: ciascuna di esse o dice sempre la verità o mente sempre. Disposte le guardie in cerchio, possiamo solo sceglierne tre e chiedere a una delle tre se le altre due sono del suo stesso tipo-le risposte vengono date alla fine di tutte le domande. Qual è il minimo numero di domande necessario per stabilire con certezza per ognuna delle 2013 guardie di che tipo è?

### 22. LABIRINTO NEL LABIRINTO

Eames ha aggiunto dei dettagli al progetto originario della pianta della fortezza. Ora è un triangolo ottusangolo partizionato in triangoli acutangoli. Per coincidenza, il numero di triangoli acutangoli nella partizione è proprio il minimo numero di triangoli acutangoli in cui si può suddividere un qualsiasi triangolo ottusangolo. Quanti sono i triangoli acutangoli nella partizione?

### 23. CUBI DA SOGNO

Dom e Ariadne sono scesi ancora di un livello e ora si trovano nel mondo creato da Dom con sua moglie Mal. Nel camminare per la città notano delle strane architetture: un palazzo è a forma di cubo tagliato. Più precisamente, detto  $ABCDEFGH$  un cubo con la solita enumerazione dei vertici ( $E$  sopra  $A$ ,  $F$  sopra  $B$ , ...), questo cubo è tagliato da 72 piani paralleli ed equispaziati, e paralleli al piano per  $B, D, E$ -il primo piano passa solo per  $A$  e l'ultimo per  $G$ . Questi piani dividono il cubo in 71 fette: qual è il rapporto del volume di quella più grande col volume di quella più piccola?

### 24. LA FINE È L'INIZIO

Dom è sceso ancora per riportare indietro Saito e ora è seduto davanti a lui. «Sono venuto a prenderla. E per ricordarle una cosa importante. Una cosa che un tempo sapeva. Le prime quattro cifre decimali dopo la virgola di  $(3a-4)(3a-5)(3c-3b-1)$  dove  $a < b < c$  sono le radici di  $x^3 - 7x + 7$ ». Cosa dirà Dom a Saito per farlo uscire dal sogno e poter rivedere la sua famiglia?