OliMaTO 4

Simulazione Gara a Squadre Nazionale 2016

"L'intelligenza è molto sexy." (Irene Adler)

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- I problemi non rispettano un ordine di difficoltà; quelli (a nostro giudizio) più impegnativi sono contrassegnati con una stellina [$\star$].
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2361 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415$$

1. Stayin' alive

"Scusate ragazzi, sono così volubile! É una mia debolezza, anzi, ad essere sincero... è la mia unica debolezza!" Sherlock e Watson fronteggiano Moriarty in una vecchia piscina. La tensione è alle stelle, i mirini sono puntati su di loro. Sherlock trova però il tempo di notare che nella piscina si trova un batterio della forma A. Ricorda di aver scritto un trattato sui batteri, secondo cui se un batterio alla sua nascita si trova nella forma A, dopo 24 ore si divide e muore, generando un batterio di tipo B e due di tipo A, che agiranno allo stesso modo. "Stayin' alive..." suona il cellulare di Moriarty. Lui si distrae. Sherlock ricorda che anche un batterio di tipo B dopo 24 ore dalla sua nascita muore e si divide, generando un batterio di tipo C e uno di tipo B. I batteri nella forma C sono invece immortali e non mutano... come Moriarty, pare: "Scusami. Non è il giorno giusto per morire." dice, e si allontana. Mentre scappa, Sherlock calcola velocemente tra quanti giorni ci sarà un numero di batteri di forma C multiplo di 1024, e mormora tra sé: "Poveretti!" "Eh?!" risponde Watson, perplesso. Quale numero ha calcolato?

2. Un ragazzino poco acuto

Sherlock e Watson tornano alla vita di tutti i giorni, ma la noia attanaglia Sherlock, che rifiuta brutalmente tutti i clienti che gli sottopongono casi a suo dire noiosi. L'ultimo è stato un ragazzino del liceo, che si è presentato da lui disperato. Voleva che lo aiutasse a trovare, come compito per le vacanze, il massimo comune divisore di $f(1), f(2), f(3), ..., f(2014), f(2015), f(2016)$, data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione tale che $f(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)...(9n+1)(10n+1)$. "Non puoi essere così idiota da dover chiedere aiuto a me." gli risponde Sherlock prima di liquidarlo, dopo aver calcolato la soluzione in cinque secondi. Di quale numero si trattava?

3. Il finto matematico

Un altro caso curioso è stato il seguente: un matematico si presenta nel suo studio affermando che i cadaveri di alcuni suoi amici sono stati trafugati. Non ricorda però le età dei morti per comunicarle alla polizia, ma a suo dire soddisfano l'espressione $Ax^2 + Bx + C = D(x+E)(x+F)$. Inoltre prima di morire i suoi amici hanno fatto le seguenti affermazioni, di cui è certo che esattamente due siano false, e inoltre che, sapendo quali siano le due false, si possano determinare con esattezza A, B, C, D, E, F.

1. Amico B: "D ha 2 anni e io sono più giovane di E"
2. Amico C: "Se almeno due età tra quelle di A, B, C, D, E, F sono uguali tra loro allora il modulo della somma delle radici del polinomio è uguale a dieci."
3. Amico D: "Ho 4 anni!"
4. Amico E: "Il prodotto delle radici è un quadrato perfetto."
5. Amico F: "C ha un numero di anni multiplo di 7 e io sono più vecchio di E... o forse abbiamo la stessa età."

Sherlock lo manda al diavolo, soprattutto perché è certo che l'uomo abbia mentito. Infatti non è un vero matematico, altrimenti avrebbe già calcolato il valore da sé. Come risposta dare come prima cifra il numero più grande associato a un'affermazione falsa, e come rimanenti cifre la somma di A,B,C,D,E,F (ad esempio se pensate che la 2 e la 5 siano false e che A = B = C = D = E = F = 1 allora date come risposta 5006).

4. [⋆] Le fantasie di Irene

In una stanza di Buckingam Palace, mentre aspetta di essere ricevuta da una sua *facoltosa cliente*, Irene Adler fantastica osservando le fotografie di Sherlock Holmes sulla scena di un crimine. Per toglierselo dalla mente, alita sul vetro e inizia a disegnare con il suo frustino due circonferenze P e Q, di raggio rispettivamente 1 e 4 e tangenti esternamente in un punto A. Vede che B e C sono punti rispettivamente su P e Q tali che $\overline{BC}$ è tangente alle due circonferenze. Disegna allora r, una retta per A che interseca P in D e Q in E e tale che B e C siano sullo stesso lato di r e le aree di $\triangle DBA$ e $\triangle ACE$ siano equivalenti. Questo non basta però a farle dimenticare Sherlock: non riesce a fare a meno di chiedersi se lui saprebbe calcolare $\frac{m}{n}$, l'area di uno di questi due triangoli con $MCD(m, n) = 1$. Voi sareste all'altezza? Restituire $m + n$.

5. Disegni con il sangue

Un uomo si presenta da Sherlock con un caso finalmente interessante: un escursionista è morto sulla riva di un lago, subito dopo lo scoppio del motore di un'automobile. Niente arma del delitto. Il cliente si concentra solo su un dettaglio: gli schizzi di sangue che l'uomo, morendo, ha lasciato sul prato. Il sangue forma infatti una circonferenza di raggio $10\sqrt{7}m$. Individuando due punti A e C su di essa, con P un punto esterno tale che $\angle PAC$ sia retto e che né $\overline{PC}$ né $\overline{PA}$ siano tangenti alla circonferenza, e B, D rispettivamente i punti (diversi da A e C) in cui i segmenti PA e PC incontrano la circonferenza, l'uomo ha calcolato che $PB = 20m$ e $PD = 10m$. Secondo lui la lunghezza del segmento AC è importante per incastrare il colpevole. "Lei è un cretino!" lo liquida Holmes. "Sarà parente del *matematico* di prima." sussurra poi a Watson. Qual era il valore di AC? (dare la risposta in cm)

6. Un'interrogazione matrimoniale

Holmes viene prelevato e portato a Buckingam Palace. Gli viene affidato il compito di recuperare delle foto compromettenti, scattate da Irene Adler insieme a una certa *facoltosa cliente*. Finora sono state interrogate tre coppie, mariti e mogli. Le donne potevano dire sia il vero sia il falso, così come i mariti che però, timorosi del giudizio delle loro spose, si limitavano a dire qualcosa di deducibile logicamente dalla frase della consorte: una frase che fosse vera in qualsiasi situazione in cui la frase della moglie fosse vera. I mariti sapevano che c'erano tre coppie interrogate, conoscevano solamente la frase detta dalla propria moglie, che però non sapevano essere vera o falsa, e sapevano che anche gli altri mariti si comportavano allo stesso modo. Purtroppo lo stenografo si era dimenticato di segnare a fianco delle varie affermazioni chi le aveva fatte, limitandosi a scrivere che le persone 1 e 5 non erano una coppia. Holmes legge le affermazioni e deduce tutto il deducibile. Commenta poi: "Ci credo che avete bisogno di me. Non mi pare che chi ha condotto questo interrogatorio avesse ben presente che vi servivano le foto della Adler."

1. "In totale c'è un numero dispari di frasi false."
2. "Esattamente una tra le donne dice il falso."
3. "In totale c'è un numero pari di frasi vere."
4. "Almeno uno tra i mariti ha detto una frase dalla quale non si può dedurre logicamente quella della moglie."
5. "In totale o tre frasi sono false oppure c'è un numero pari di frasi false."
6. "Esattamente due tra le donne dicono il vero."

Consegnare la risposta così: come prima cifra dare 7 se è possibile determinare tutte le coppie, e altrimenti il numero di persone di cui non si sa determinare la coppia; come seconda cifra dare 7 se è possibile determinare tutti i sessi, e altrimenti il numero di persone di cui non si sa determinare il sesso; come terza cifra dare il numero di frasi di cui si può determinare con certezza se sono vere o false; come quarta cifra dare il numero di frasi certamente vere.

7. [⋆] Foto compromettenti

"Di quante foto esattamente dispone questa Irene Adler, che raffigurano lei stessa con il suo capo in *situazioni compromettenti*?" domanda Sherlock al segretario dell'*autorità più alta del paese*, a detta di Mycroft. Risponde Mycroft per lui: "Molte. Almeno $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60000}{n(n+2)(n+4)}$. A quanto corrisponde questo valore, fratellino?"

8. Stalking

Irene Adler vuole saperne di più su Sherlock. Oltre a fargli fare di nascosto delle foto che poi rimira per ore, ha preso l'abitudine di conversare sui blog per scoprire cose nuove su di lui. Ha trovato 5 persone che sostengono di conoscerlo, ma sa che solo una dice la verità e tutte loro sanno chi è. Vuole scoprirlo interrogandole, ma rispondono seguendo una strana regola: sempre almeno una di loro dice la verità, e non ripetono mai la stessa sequenza di risposte senza prima aver esaurito tutte quelle possibili. A parte ciò, mentono o dicono il vero in modo del tutto casuale. Ponendo soltanto la domanda "Chi di voi conosce Sherlock?" ad ognuno di loro ogni giorno, quanti giorni impiegherà al massimo per scoprire chi davvero lo conosce?

9. Uno strano viaggio

Sherlock e Watson corrono a casa di Irene per recuperare le foto. La pianta della città è una griglia rettangolare di dimensioni 4×3. I due partono da un punto qualsiasi del bordo sinistro e devono andare a uno qualsiasi del bordo destro, muovendosi solo sui segmenti della griglia verso l'alto, verso destra o verso il basso ma senza mai ripassare su segmenti già attraversati. Quanti sono i percorsi che possono seguire in tutto?

10. [⋆] Armadi e chiavette USB

Mentre aspetta Irene seduto sul suo divano, Sherlock cerca dove le fotografie potrebbero essere nascoste. In particolare nota un armadio di vetro nel quale è nascosta una penna USB. La porta è dotata di un tastierino numerico, che ogni giorno cambia combinazione; quella di oggi per esempio è uguale al quadrato della somma delle cifre di $\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{(1-x_i)^2}$ dove $x_1, ..., x_{2016}$ sono le radici del polinomio $x^{2016} + x^{2015} + ... + x^2 + x + 1$. Quanto vale oggi la combinazione?

11. "Il vestito da battaglia"

"Che cosa indosserai?" "Il vestito da battaglia." - le ultime parole di Irene prima di presentarsi a Sherlock. L'occhio acuto di Holmes nota velocemente tre importanti misure, che più tardi ricorderà per aprire la cassaforte contenente il misterioso telefono di Irene. Questo gli ricorda un altro problema da lui affrontato, in cui le tre dimensioni - a differenza di ora - erano quelle di un parallelepipedo rettangolo, siano esse a, b, c, per cui valeva $\frac{1}{49a} + \frac{1}{9b} + \frac{1}{21c} = \frac{1}{77}$. Quanto valeva, al minimo, il volume di quel parallelepipedo?

12. Anche i migliori a volte vengono sconfitti

Irene, con una mossa fulminea, usa del narcotizzante per addormentare Sherlock e scappare con il suo telefono. Per controllare che sia davvero fuori combattimento, si piega su di lui e gentilmente gli volta la faccia con il frustino, domandandogli: "Detective, riesci a trovarmi tutte le coppie ordinate (x, y) di interi non negativi tali che $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$?" Sherlock combatte per trovare la risposta nel suo palazzo mentale, ma purtroppo il narcotizzante infine ha la meglio e Irene scappa soddisfatta. Voi almeno avrete trovato la soluzione: dati i valori cercati come $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ consegnare $x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

13. Il dott. Watson e il caso della password inquietante

Irene ha lasciato a Sherlock come ricordo una suoneria molto particolare. Watson ne è parecchio infastidito così vorrebbe eliminarla, ma provandoci scopre che Sherlock avendolo predetto ha impostato come password $\sum_{n=1}^{2016} f(f(n))$ dove $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione tale che $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 2$ e per $n > 2$ $f(n)$ è il più piccolo primo dispari che non divide n. Anche se per prendersi gioco di lui Sherlock gli ha dato queste informazioni, Watson non riesce comunque a disinstallare la suoneria. Voi ci riuscireste?

14. Amore e origami

Molly Hooper si presenta alla festa di Natale armata di buoni propositi per conquistare Sherlock. Lui però ha altro a cui pensare: la Adler gli ha recapitato il prezioso telefono come regalo. In preda al tormento, Molly si distrae con un origami: prende $ABCD$ un foglio di carta quadrato di lato $20cm$, su di esso disegna una circonferenza tangente ai quattro lati, prende il vertice C e lo piega facendolo coincidere con il punto medio di AB. Prova poi a calcolare l'area della parte di cerchio ancora visibile, non coperta dalla piega. "Accidenti, Sherlock ce la farebbe!" borbotta in lacrime, e accartoccia il foglio. Qual è questo valore? (Dare la risposta in mm^2)

15. Confidenze tra fratelli

La sorte di Irene ha messo Sherlock di cattivo umore. Per consolarlo, suo fratello Mycroft si confida con lui: "Soffrire non è un vantaggio, Sherlock. Io vado al lavoro ogni mattina e posso decidere se farlo in autobus o a piedi. Se un giorno prendo l'autobus, la mattina successiva ho $\frac{1}{5}$ di probabilità di andare a piedi, mentre se vado a piedi il giorno dopo ho $\frac{1}{2}$ di probabilità di andare a piedi. Eppure ho imparato a fare i conti con l'aleatorietà della vita. Ad esempio, sapendo che questa mattina sono andato a piedi, mi sapresti dire con che probabilità prenderò l'autobus tra 4 mattine?" Nonostante questo non basti a consolarlo, Sherlock non può fare a meno di calcolare questo valore. Rispondete con la differenza tra denominatore e numeratore della frazione ridotta ai minimi termini.

16. [$\star$] Una vana speranza

Sherlock sta tentando di scoprire la password del cellulare di Irene, per disporre almeno delle informazioni segrete che questo contiene. Si accorge d'un tratto che il contatore delle visite al blog di Watson è bloccato da tempo su un valore che corrisponde al numero di percorsi, data una griglia 6×6, che vanno dall'angolo in basso a sinistra a quello in alto a destra potendosi muovere in alto, destra, basso (ma non a sinistra) e senza poter ripassare dove si è già passati tali che l'area sottesa dal percorso (in quadretti) sia divisibile per 7. Sospettando che sia un messaggio nascosto di Irene, inserisce tale numero sul cellulare, ma non funziona. Di che valore si trattava? (Consegnare le ultime 4 cifre della risposta).

17. Provaci ancora, Watson!

Watson è esasperato, perché non riesce mai a intuire la verità. Ad esempio, ora pare che Irene sia viva e che Sherlock l'avesse sospettato molto prima di lui. Così, per accertarsi della sua capacità di riconoscere i bugiardi, si reca in un bar dove ci sono 2016 persone intorno a un tavolo, alcuni dei quali sono bugiardi e altri sinceri. Prima di chiedere qualcosa a uno di loro vuole capire la probabilitá che la risposta sia sincera. Effettua un test: chiede a ciascuno se i vicini siano sinceri o meno. Tutti quelli di posto pari dicono "La persona alla mia destra mente se e solo se mente anche quella alla sua destra", quelli di posto dispari dicono invece "Solo una delle due persone alla mia destra mente". "Forse ho sbagliato di nuovo domanda." borbotta Watson. Calcola comunque la probabilitá che, interpellata una persona a caso, gli dará una risposta sincera. Si dia la risposta moltiplicata per 10000.

18. [$\star$] Messaggi equivocabili

"Lei gli ha scritto molte volte!" rimprovera Watson a Irene adirato, parlando di Sherlock. Lei risponde sorniona: "Uhmpf! Sempre per cose banali." "Non c'è niente di banale in questo caso." fa lui. Irene sorride e tira fuori il cellulare, leggendo i messaggi che ha effettivamente spedito a Holmes: "Sono triste stasera, ceniamo insieme?",

"É sexy su Crimewatch, ceniamo insieme?", "Ora non ho fame. Ceniamo insieme?", "Determini la somma delle potenze settime delle radici di $p(x) = x^5 - 16x^3 - 18$ con molteplicità. Poi ceniamo insieme?"

19. [$\star$] Una vendetta degna di lui

Mentre Sherlock origliava la conversazione di Watson con Irene, un uomo dei servizi segreti americani si è introdotto in casa Holmes e tiene sotto tiro la Signora Hudson. Quando Holmes lo scopre e riesce a disarmarlo, trova un modo ingegnoso di punirlo: lancia una moneta equa, se esce testa gli fa fare un salto dalla finestra di 1 piano, se esce croce di 2 piani. Quando l'uomo è caduto esattamente di 36 piani in tutto, Holmes si considera soddisfatto e chiama Lestrade denunciando l'effrazione. Detto N il numero di diverse sequenze di lanci con cui Holmes poteva arrivare a esattamente 36 piani di caduta, si dia come risposta il quadrato del resto della divisione di N per 144.

20. La damigella in pericolo

Rientrando in casa, il giorno seguente, Sherlock ha una sorpresa: Irene si trova da loro e ha bisogno del suo aiuto. Si dice inseguita e in pericolo di vita, e per scampare ha bisogno di decrittare un messaggio la cui chiave sa essere la somma di tutti i possibili m, n interi positivi tali che $m = \sqrt{n} + \sqrt{n + 2016}$. Quanto vale questa somma?

21. Il piano di Sherlock

Sherlock ha velocemente trovato la chiave e decrittato il messaggio. Prima che la situazione precipiti, riesce ancora a trascorrere una sera in casa da solo con Irene Adler. Mentre rifiuta con la solita flemma la proposta di lei, sussurrandole: "Perché dovrei voler cenare con lei, se io non ho fame?" le tiene il polso con la mano... per sentire il battito cardiaco, ovviamente. Si rende subito conto che il numero di battiti è pari ad a, dove a è soluzione reale della seguente: $\sqrt{2017\sqrt{2017\sqrt{2017...}}} = \sqrt{9x^2 + \sqrt{36x^2 + \sqrt{144x^2 + \sqrt{576x^2 + ...}}}}$ Quanto vale a?

22. Holmes contro Holmes

Ma la felicità dura un attimo. Sherlock è presto convocato da suo fratello Mycroft, adirato con lui per essersi fatto gabbare mandando a monte una missione di sicurezza internazionale: infatti il messaggio da lui crittato è finito in mano ai terroristi. Sfogandosi con lui, Mycroft urla adirato: "Un uomo solo e ingenuo che tenta di mettersi in mostra, e una donna abbastanza intelligente da farlo sentire speciale. Ingannarti è stato più facile che calcolare $p(5)$, con $p(x)$ polinomio di quarto grado con $p(1) = 3, p(2) = 7, p(3) = 13, p(4) = 21, p(10) = 3136$. Possibile?!!" Se per Mycroft si tratta di uno scherzo... dovreste effettivamente riuscirci anche voi.

23. Superbia femminile

Irene Adler è felice: Sherlock non ha scoperto la password, le foto sono al sicuro, lei ha dimostrato a Mycroft tutto il suo potere. Gli presenta quindi una lunga lista di richieste, sussurrando: "Potrei dirle che non è una grande spesa per le finanze di uno Stato, ma così le mentirei." Mycroft la legge e calcola velocemente che la cifra ammonta a $m_1p_1q_1 + ... + m_np_nq_n$, trovate tutte le terne (m, p, q) di naturali con p, q primi tali che $2^mp^2 + 1 = q^5$ e dati i valori cercati come $(m_1, p_1, q_1), ..., (m_n, p_n, q_n)$. Quanto costerebbe Irene alla Corona Inglese?

24. I AM - - - - LOCKED

Sherlock, profondamente umiliato, non ha tuttavia perso il suo smalto: dal battito cardiaco di Irene (di cui sopra) trae informazioni che lo conducono alla scoperta della password. Il caso si conclude così felicemente, ma Sherlock è costretto a separarsi da Irene... per quanto tempo? Prima di allontanarsi, Sherlock disegna sul polso di Irene un triangolo ABC rettangolo in A, con $AC = 8$, $AB = 6$. Sia H il piede dell'altezza condotta da A; siano D, E punti su BC appartenenti alle bisettrici di $\angle BAH$ e $\angle CAH$ rispettivamente. Costruisce infine un quadrato $DEFG$ con F, G dalla parte opposta di A rispetto a BC. Evidenzia poi i segmenti FC, GB, ad indicare che $FC + GB$ è il tempo che li separa dal loro prossimo incontro. Per quanto tempo?