OliMaTO 4

Simulazione Gara Nazionale 2016

28 Aprile 2016

Benvenuti alla quarta edizione della simulazione della gara nazionale delle Olimpiadi della Matematica sotto l'egida di OliMaTO, la nona complessiva.
Compilare la prima parte di questo modulo prima della gara e la seconda parte prima di consegnare.

NOME:

COGNOME:

Anno di corso:

Istituto frequentato:

Provincia di appartenenza:

Indirizzo e-mail:

Punteggio alle provinciali (indicare se si parteciperà alla gara nazionale individuale):

Indica qui di seguito i punteggi che PENSI di aver ottenuto nei seguenti esercizi:

Esercizio 1:

Esercizio 2:

Esercizio 3:

Esercizio 4:

Esercizio 5:

Esercizio 6:

Punteggi ottenuti (spazi riservati ai correttori):

1. 2. 3. 4. 5. 6. TOT.

REGOLAMENTO

- Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome su ogni foglio consegnato. Per poter partecipare alla gara è necessario essere muniti di un documento d'identità. Lasciatelo in evidenza sul vostro tavolino. I fogli di brutta non dovranno essere consegnati.
- Gli unici strumenti consentiti sono quelli per scrivere e per disegnare. In particolare, E' VIETATO INTRODURRE NELL'AULA appunti, tavole, macchine calcolatrici, strumenti elettronici di qualsiasi genere e telefoni cellulari o qualsivoglia mezzo di comunicazione con l'esterno.
- Per ragioni organizzative non è consentito lasciare il proprio posto senza l'autorizzazione del personale di sorveglianza. Per qualsiasi necessità dovete alzare la mano e attendere. In particolare, questa procedura deve essere seguita per:
  - porre dei quesiti relativi al testo della prova;
  - chiedere di andare in bagno (prima di recarvi in bagno raccogliete tutto ciò che avete scritto e consegnatelo al sorvegliante. Non è consentito andare in bagno durante i primi 30 minuti e durante gli ultimi 45 minuti di gara);
  - consegnare il compito.
- La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti. Ogni esercizio vale 7 punti.
- Solo durante i primi 30 minuti di gara è consentito porre delle domande per chiarimenti sul testo.
- Negli ultimi 10 minuti di gara non è consentito consegnare il compito. Tutti quelli che saranno rimasti in aula fino a quel momento dovranno lasciare il fascicoletto chiuso sul proprio tavolo, senza altri fogli o brutte copie, ed attendere il termine ufficiale della gara. Al termine esatto i sorveglianti provvederanno a raccogliere tutti i fascicoletti e solo alla fine sarete autorizzati a lasciare l'aula.

Buon lavoro!!!

Esercizio 1

Sia $a_0 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2n$ per $n \geq 1$ e sia $b_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{... + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_0}}}}}$.
Dimostrare che b_n è un numero intero per ogni scelta di n.

Esercizio 2

Dato un gruppo di n persone è definita la relazione di conoscenza nel modo seguente: data una coppia di persone A e B, A conosce B se e soltanto se B conosce A.
Dimostrare che:

a) In un gruppo di 6 persone esiste sempre un gruppo di tre persone che si conoscono tutte oppure un gruppo di tre persone che non si conoscono.

b) Dati $n, c \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ e $c \geq \sqrt{n} + 1$ non è vero che esiste sempre un gruppo di c persone che si conoscono tutte oppure un gruppo di c persone che non si conoscono.

Esercizio 3

Sia $\triangle ABC$ un triangolo equilatero di centro O. Sia ℓ una retta passante per O che interseca AB nel punto M e AC nel punto K. Sia M' il simmetrico di M rispetto al punto medio di AB, K' il simmetrico di K rispetto al punto medio di AC. Dimostrare che $M'K'$ tange la circonferenza inscritta ad $\triangle ABC$.

Esercizio 4

Sia $n > 1$ un intero positivo e $\mathbb{A} = \{1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$. Diremo che un numero $a \in \mathbb{A}$ è *bello* se esiste $b \in \mathbb{A}$ tale che $n^2 \mid ab - b$. Diremo inoltre che un numero $a \in \mathbb{A}$ è *fantastico* se $n^2 \mid a^2 - a$. Sia g il numero di interi *belli* e v il numero di interi *fantastici* in $\mathbb{A}$. Dimostrare che

$$v^2 + v \leq g \leq n^2 - n$$

Esercizio 5

Un numero finito di monete è posizionato su una linea infinita di quadretti. Una mossa consiste nello scegliere un quadretto con almeno due monete, prenderne due e metterne una nel quadretto alla sua destra e una in quello alla sua sinistra. Il gioco termina quando non è più possibile muovere. Dimostrare che, data una configurazione iniziale, qualsiasi sequenza di mosse porta a terminare il gioco nello stesso numero di mosse e con la stessa configurazione finale.

Esercizio 6

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico ma non un rettangolo. Consideriamo r, s gli assi di AB e CD rispettivamente. Siano $X_1 = r \cap BC$, $X_2 = r \cap AD$, $Y_1 = s \cap BC$,$Y_2 = s \cap AD$. Sia I l'incentro di $\triangle DY_1X_2$ e J l'incentro di $\triangle AX_1Y_2$. Dimostrare che I, J, X_2, Y_2 stanno su una stessa circonferenza.