OliMaTO 4

Simulazione Gara Nazionale 2016

28 Aprile 2016

Benvenuti alla quarta edizione della simulazione della gara nazionale delle Olimpiadi della Matematica sotto l'egida di OliMaTO, la nona complessiva.
Compilare la prima parte di questo modulo prima della gara e la seconda parte prima di consegnare.

NOME:

COGNOME:

Anno di corso:

Istituto frequentato:

Provincia di appartenenza:

Indirizzo e-mail:

Punteggio alle provinciali (indicare se si parteciperà alla gara nazionale individuale):

Indica qui di seguito i punteggi che PENSI di aver ottenuto nei seguenti esercizi:

Esercizio 1:

Esercizio 2:

Esercizio 3:

Esercizio 4:

Esercizio 5:

Esercizio 6:

Punteggi ottenuti (spazi riservati ai correttori):

1. 2. 3. 4. 5. 6. TOT.

REGOLAMENTO

- Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome su ogni foglio consegnato. Per poter partecipare alla gara è necessario essere muniti di un documento d'identità. Lasciatelo in evidenza sul vostro tavolino. I fogli di brutta non dovranno essere consegnati.
- Gli unici strumenti consentiti sono quelli per scrivere e per disegnare. In particolare, E' VIETATO INTRODURRE NELL'AULA appunti, tavole, macchine calcolatrici, strumenti elettronici di qualsiasi genere e telefoni cellulari o qualsivoglia mezzo di comunicazione con l'esterno.
- Per ragioni organizzative non è consentito lasciare il proprio posto senza l'autorizzazione del personale di sorveglianza. Per qualsiasi necessità dovete alzare la mano e attendere. In particolare, questa procedura deve essere seguita per:
  - porre dei quesiti relativi al testo della prova;
  - chiedere di andare in bagno (prima di recarvi in bagno raccogliete tutto ciò che avete scritto e consegnatelo al sorvegliante. Non è consentito andare in bagno durante i primi 30 minuti e durante gli ultimi 45 minuti di gara);
  - consegnare il compito.
- La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti. Ogni esercizio vale 7 punti.
- Solo durante i primi 30 minuti di gara è consentito porre delle domande per chiarimenti sul testo.
- Negli ultimi 10 minuti di gara non è consentito consegnare il compito. Tutti quelli che saranno rimasti in aula fino a quel momento dovranno lasciare il fascicoletto chiuso sul proprio tavolo, senza altri fogli o brutte copie, ed attendere il termine ufficiale della gara. Al termine esatto i sorveglianti provvederanno a raccogliere tutti i fascicoletti e solo alla fine sarete autorizzati a lasciare l'aula.

Buon lavoro!!!

RINGRAZIAMENTI

- Per la realizzazione del testo e delle soluzioni: Simone Pelizzola, Matteo Rossi, Francesco Sala, Riccardo Zanotto.
- Per l'organizzazione dell'iniziativa, la sorveglianza e la correzione: Roberto Abagnale, Debora Bertotto, Fabio Buccoliero, Eugenio Colla, Matteo Durante, Gilberto Jones, Simone Pelizzola, Alessandro Perlo, Marco Protto, Fabio Roman, Matteo Rossi, Michele Trosso, Shuyi Yang, Riccardo Zanotto, e tutta la comunità del sito `olimato.org`.
- Per la disponibilità dei locali: Stefania Serre e l'organizzazione del Liceo Spinelli.
- Per l'ufficialità delle convocazioni: Daniela Ciravegna, Simona Martinotti, Stefania Serre, e la sezione torinese del progetto Olimpiadi di Matematica.
- Per l'opportunità, tramite i vari progetti, di gareggiare imparando: tutto lo staff del progetto Olimpiadi di Matematica, lo staff dell'Associazione Subalpina Mathesis, e di tutte le varie iniziative collegate e non.

Esercizio 1

Sia $a_0 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2n$ per $n \geq 1$ e sia $b_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{... + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_0}}}}}$.
Dimostrare che b_n è un numero intero per ogni scelta di n.

Soluzione proposta

Vogliamo dimostrare che $b_n = n + 1$.

Dimostriamo prima per induzione che $a_n = (n + 1)^2 - n$

Passo base: $a_0 = (0 + 1)^2 - 0 = 1$
Passo induttivo: Supponiamo che valga $a_n = (n + 1)^2 - n$ fino a un certo n, proviamolo per $n + 1$:
$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) = (n+1)^2 - n + 2(n+1) = (n+1)^2 + n + 2 = n^2 + 2n + 1 + n + 2 = (n+2)^2 - (n+1)$

Riscriviamo ora b_n come $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n}$ e dimostriamo per induzione che $b_n = n + 1$:

Passo base: $b_0 = \sqrt{a_0} = 1$
Passo induttivo: Supponiamo che valga $b_n = n + 1$ fino a un certo n, proviamolo per $n + 1$:
$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n} = \sqrt{(n + 2)^2 - (n + 1) + (n + 1)} = n + 2$ e la tesi è dimostrata.

Scaletta di correzione

- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 1 punto per chi congettura che $a_n = (n + 1)^2 - n$.
- 1 punto per chi congettura che $b_n = n + 1$.
- 2 punti per chi dimostra una sola delle due congetture.
- 2 punti per chi dimostra l'altra congettura.
- 1 punto per chi conclude.

Esercizio 2

Dato un gruppo di n persone è definita la relazione di conoscenza nel modo seguente: data una coppia di persone A e B, A conosce B se e soltanto se B conosce A.
Dimostrare che:

a) In un gruppo di 6 persone esiste sempre un gruppo di tre persone che si conoscono tutte oppure un gruppo di tre persone che non si conoscono.

b) Dati $n, c \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ e $c \geq \sqrt{n} + 1$ non è vero che esiste sempre un gruppo di c persone che si conoscono tutte oppure un gruppo di c persone che non si conoscono.

Soluzione proposta

Soluzione del punto a:
Si consideri una delle persone.
Poichè ce ne sono altre 5 e ognuna la conosce oppure non la conosce necessariamente ne conosce almeno 3 o non ne conosce almeno 3.
Si può supporre senza perdita di generalitá che non ne conosca almeno 3, infatti nel caso opposto è sufficiente ripetere ogni passaggio invertendo ogni rapporto di conoscenza.
Ora si considerino 3 di queste persone.
Se almeno due tra loro non si conoscono allora formano un triangolo in cui non si conosce nessuno con il primo.
Se no vuol dire che si conoscono tutti, ma essendo in 3 formano un triangolo di persone che si conoscono tutte.
Segue la tesi.

Soluzione del punto b:
Per ipotesi si ha che $c - 1 \geq \sqrt{n}$, da cui $(c-1)^2 \geq n$.
Di conseguenza le persone possono essere divise in $c - 1$ gruppi eventualmente vuoti da al piú $c - 1$ persone.
Si consideri dunque una configurazione in cui all'interno di quei gruppi le persone si conoscono tutte a due a due ma nessuno conosce persone al di fuori del proprio gruppo.
In questo modo, poichè per pigeonhole in ogni gruppo possibile di c persone almeno due devono appartenere allo stesso gruppo e almeno due devono appartenere a gruppi diversi, in ogni gruppo di c persone si avrá sempre almeno una coppia di persone che si conoscono e una di persone che non si conoscono, rendendo impossibile la configurazione richiesta dal testo.

Scaletta di correzione

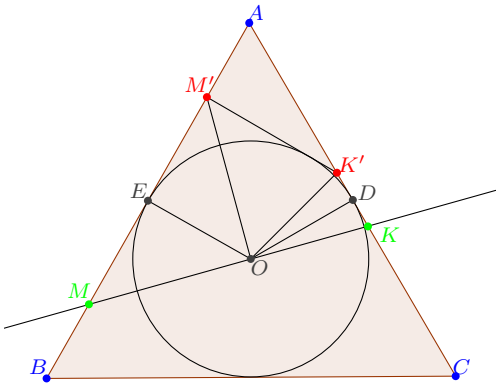
- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 4 punti per chi svolge tutta la dimostrazione del punto a in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 3 punti per chi svogle tutta la dimostrazione del punto b in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.

- 2 punti per chi osserva che ognuno conosce almeno 3 persone o non ne conosce almeno 3.
- 1 punto per chi osserva che se tra 3 conosciuti/sconosciuti almeno due si conoscono/non si conoscono la tesi è verificata.
- 1 punto per chi osserva che se non è verificata la condizione precedente allora c'è necessariamente un triangolo che soddisfa la tesi nel gruppo.
- 1 punto per chi osserva che $(c-1)^2 \geq n$ e divide le persone in al piú $c-1$ gruppi da al piú $c-1$ persone.
- 1 punto per chi connette completamente i sottogruppi.
- 1 punto per chi conclude.

Esercizio 3

Sia $\triangle ABC$ un triangolo equilatero di centro O. Sia ℓ una retta passante per O che interseca AB nel punto M e AC nel punto K. Sia M' il simmetrico di M rispetto al punto medio di AB, K' il simmetrico di K rispetto al punto medio di AC. Dimostrare che $M'K'$ tange la circonferenza inscritta ad $\triangle ABC$.

Soluzione proposta



Vogliamo dimostrare che O è l'excentro del triangolo $\triangle AM'K'$, in questo modo l'inscritta di $\triangle ABC$ è l'exinscritta di $\triangle AM'K'$, e quindi tange $M'K'$.
Dato che O giace sulla bisettrice di $\angle M'AK'$, ci basta dimostrare che $\angle M'OK'$ è quello dell'excentro: in generale, dato un triangolo $\triangle XYZ$ con I_X l'excentro opposto a X, vale $\angle YI_XZ = 90 - \frac{1}{2}\angle YXZ$.
Per cui ci siamo ridotti a dimostrare che $\angle M'OK' = 90 - \frac{1}{2} \cdot 60 = 60$.
Detti D il punto medio di AC, E il punto medio di AB, abbiamo che $KD = DK'$ e $ME = EM'$; inoltre D, E sono anche i punti di tangenza dell'incerchio perché $\triangle ABC$ è equilatero. Ma allora i triangoli $\triangle OKD, \triangle OK'D$ sono congruenti poiché rettangoli con due lati congruenti; per cui $OK = OK'$ e similmente $OM = OM'$.
Abbiamo dunque $\angle KOK' = 180 - 2\angle K'KO$ e $\angle MOM' = 180 - 2\angle M'MO$. Allora $\angle K'OM' = 180 - (180 - 2\angle K'KO) - (180 - 2\angle M'MO) = 2\angle M'MO + 2\angle K'KO - 180 = 2(\angle AMK + \angle AKM) - 180 = 2(180 - 60) - 180 = 60$, che era quello che volevamo dimostrare.

Scaletta di correzione

- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 1 punto per chi dimostra che $OK = OK'$ e $OM = OM'$.
- 1 punto per chi osserva senza dimostrare che O deve essere l'excentro.
- 2 punti per chi scrive l'angolo dell'excentro.
- 2 punti per chi svolge il conto di angoli finale.
- 1 punto per chi conclude che O è l'excentro perché sta sulla bisettrice.
- 4 punti per chi dimostra che $\triangle OM'K'$ è simile a $\triangle AMK$.

Esercizio 4

Sia $n > 1$ un intero positivo e $\mathbb{A} = \{1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$. Diremo che un numero $a \in \mathbb{A}$ è *bello* se esiste $b \in \mathbb{A}$ tale che $n^2 \mid ab - b$. Diremo inoltre che un numero $a \in \mathbb{A}$ è *fantastico* se $n^2 \mid a^2 - a$. Sia g il numero di interi *belli* e v il numero di interi *fantastici* in $\mathbb{A}$. Dimostrare che

$$v^2 + v \leq g \leq n^2 - n$$

Soluzione proposta

Dimostriamo prima $g \leq n^2 - n$.
Osserviamo che se a è *bello* allora $b(a-1)$ è multiplo di n^2 per un qualche $b \in \mathbb{A}$.
Ora, se $a - 1$ fosse coprimo con n allora b dovrebbe essere un multiplo di n^2, il che è assurdo perché $0 < b < n^2$.
Dunque se $a - 1$ è coprimo con n allora a non è un numero *bello*.
Dunque tutti i numeri del tipo kn non sono *belli* perché $MCD(kn - 1, n) = 1$.
Ma in $\mathbb{A}$ ci sono esattamente $n - 1$ numeri di quella forma $(n, 2n, \ldots, (n-1)n)$, quindi

$$g \leq n^2 - 1 - (n - 1) = n^2 - n$$

Dimostriamo ora $v^2 + v \leq g$.
Osserviamo innanzitutto che se m è *fantastico* allora tutti i numeri di $\mathbb{A}$ nella forma $m + kn$ per un qualche k intero non nullo non possono essere *fantastici*.
Infatti $(m + kn)^2 - (m + kn) = m^2 - m + k^2n^2 + 2mkn - kn$.
Ora, poiché m è *bello* $(m^2 - m) + k^2n^2$ è multiplo di n^2.
Resta $kn(2m - 1)$. Di certo $k < n$, altrimenti staremmo considerando un numero maggiore o uguale $m + n^2$ che non appartiene a $\mathbb{A}$; ma $2m - 1 = m + (m - 1)$ che sono coprimi e il loro prodotto per ipotesi è multiplo di n^2.
Ma allora entrambi hanno fattori comuni con n e in totale hanno tutti i fattori di n.
Essendo però coprimi la loro somma non avrà fattori appartenenti a uno dei due addendi, dunque non avrà fattori in comune con n, quindi $kn(2m - 1)$ non è multiplo di n^2.
Dunque sappiamo che due numeri *fantastici* non possono avere lo stesso resto modulo n e non possono essere multipli di n, se no non sarebbero neanche *belli*, ma ogni numero *fantastico* è *bello*, basta considerare $b = a$.
Quindi $v \leq n - 1$.
Osserviamo ora che se m è *fantastico* allora tutti i numeri in $\mathbb{A}$ nella forma $m + kn$ con k intero sono *belli*.
Infatti $(m+kn)(mn) - mn = mkn^2 + n(m^2 - m)$ multiplo di n^2, quindi $b = mn \pmod{n^2}$ soddisfa e non è nullo perchè n non divide m.
Questi numeri in totale sono n per ogni m *fantastico* (se $m \equiv m_1 \pmod{n}$ allora sono $n \cdot 0 + m_1, n \cdot 1 + m_1, \ldots, n \cdot (n-1) + m_1$) e quelli relativi a *fantastici* distinti sono a due a due distinti, se no avremmo che due numeri *fantastici* sono congrui allo stesso numero in modulo n che è assurdo.
Quindi, dato che $v \leq n - 1$, abbiamo

$$g \geq vn \geq v(v + 1) = v^2 + v$$

Scaletta di correzione

- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 2 punti per chi dimostra che $g \leq n^2 - n$ in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 5 punti per chi dimostra che $v^2+v \leq g$ in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 1 punto per chi nota che sia b che $a-1$ devono avere fattori di n.
- 1 punto per chi nota che i multipli di n non sono buoni e conclude la disuguaglianza di destra.
- 3 punti per chi osserva che due numeri molto buoni non possono avere lo stesso resto modulo n.
- 2 punti per chi nota che tutti i numeri congrui a un numero molto buono modulo n sono buoni e conclude la disuguaglianza di sinistra.

Esercizio 5

Un numero finito di monete è posizionato su una linea infinita di quadretti. Una mossa consiste nello scegliere un quadretto con almeno due monete, prenderne due e metterne una nel quadretto alla sua destra e una in quello alla sua sinistra. Il gioco termina quando non è più possibile muovere. Dimostrare che, data una configurazione iniziale, qualsiasi sequenza di mosse porta a terminare il gioco nello stesso numero di mosse e con la stessa configurazione finale.

Soluzione proposta

Dimostriamo prima che il gioco si svolge in un intervallo finito di quadretti: numeriamo i quadretti come $..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$, quando per la prima volta avviene uno spostamento nella coppia di quadretti $(i, i+1)$, assegneremo la moneta che si è mossa come appartenente a quella coppia. Ogni volta, quindi, che una moneta si muoverà all'interno di quella coppia, diremo che si tratta di quella ad essa assegnata. Notiamo inoltre che con questo metodo ogni moneta rimane "intrappolata" in una coppia di quadretti appena ne raggiunge una libera; essendo quindi le monete in un numero finito lo sono anche le coppie che verranno occupate, dunque lo sono anche i quadretti utilizzati durante tutto lo svolgimento del gioco. Senza perdere generalità, diciamo quindi che il gioco si svolge in un intervallo $[0, l]$.

Dimostriamo ora che il gioco termina in un numero finito di mosse: sia a_i il numero di monete nella casella i e sia $T = \sum_{i=0}^{l} i^2 a_i$, dopo ogni mossa T aumenterà di 2 (aggiungo $(n-1)^2 + (n+1)^2$ e tolgo $2n^2$), ma per come è definito varrà per certo $T \leq l^2 \cdot \sum_{i=0}^{l} a_i$ in ogni istante, quindi il gioco terminerà dopo un numero finito di passi.

Dimostriamo infine l'unicità della configurazione finale e del numero di mosse per una configurazione fissata $(a_0, ..., a_l)$. Sia k_i il numero di mosse effettuate sul quadretto i durante tutto il gioco, vale

$$a_i + k_{i-1} + k_{i+1} - 2k_i \in \{0, 1\}$$

e la sequenza $\{k_i\}$ è unica. Supponiamo infatti che non lo sia, allora esiste una sequenza $\{k'_i\}$ con le stesse proprietà. Sia $\{a_i\}$ una sequenza tale che $\min(\sum_{i=0}^{l} k_i, \sum_{i=0}^{l} k'_i)$ sia minimo e scegliamo j tale che $a_j > 1$ (se non possiamo farlo finiamo nel caso banale dove il gioco non permette nessuna mossa iniziale); questo implica che $k_j, k'_j > 0$, quindi le sequenze $\{k_i\}$ e $\{k'_i\}$ con gli elementi k_j e k'_j diminuiti di 1 soddisfano per una sequenza $\{a_i\}$ dove a_{j-1}, a_j, a_{j+1} sono sostituiti con $a_{j-1} + 1, a_j - 2, a_{j+1} + 1$, abbiamo quindi raggiunto un nuovo minimo, assurdo. Questa mossa infatti può essere effettuata per prima in entrambi i casi. Questo perchè necessariamente quella mossa va effettuata in entrambi i casi. Supponiamo ora che nella seconda sequenza non sia quella la prima mossa ma che sia effettuata per la prima volta al passo x. Se invece di effettuarla al passo x la effettuo al passo 1 si ha che le successive $x - 1$ mosse non tolgono monete a quella casella. Inoltre dall'$x-$esima in poi la situazione è analoga a prima, dunque la sequenza di mosse porta allo stesso risultato.

Scaletta di correzione

- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.

- 1 punto per chi nota, senza dimostrarlo, che si può riportare il gioco su un intervallo finito.
- 1 punto per chi dimostra correttamente che il gioco si svolge in un intervallo finito di quadretti.
- 1 punto per chi considera l'invariante T.
- 2 punti per chi dimostra che il gioco termina dopo un numero finito di mosse (3 punti nel caso non sia stato assegnato il punteggio precedente per l'invariante).
- 1 punto per chi ragiona sul numero di mosse in ogni quadretto.
- 1 punto per chi fa ragionamenti di minimo sulla somma dei k_i.
- 1 punto per chi conclude in modo corretto.

Esercizio 6

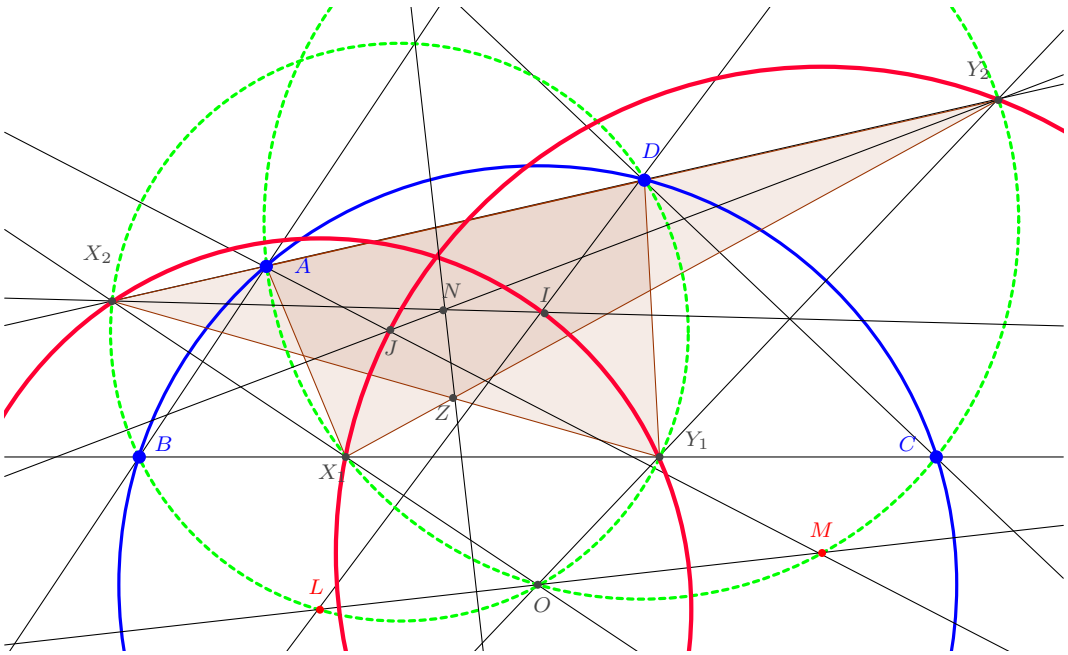
Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico ma non un rettangolo. Consideriamo r, s gli assi di AB e CD rispettivamente. Siano $X_1 = r \cap BC$, $X_2 = r \cap AD$, $Y_1 = s \cap BC$,$Y_2 = s \cap AD$. Sia I l'incentro di $\triangle DY_1X_2$ e J l'incentro di $\triangle AX_1Y_2$. Dimostrare che I, J, X_2, Y_2 stanno su una stessa circonferenza.

Soluzione proposta

Lemma 1: Sia $\triangle ABC$ un triangolo, I il suo incentro, M l'intersezione della bisettrice da A e dell'asse di BC. Allora M è il punto medio dell'arco BC sulla circoscritta, ed esiste una circonferenza centrata in M passante per B, I, C.

Lemma 2: Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico; sia $E = AB \cap CD$ e $F = AC \cap BD$. Allora la bisettrice dell'angolo $\angle AED$ è parallela alla bisettrice dell'angolo $\angle AFD$.

Dimostrazione: Siano $2x = \angle AED$, $2y = \angle AFD$, $z = \angle BAC$; siano P, Q su AD i piedi delle bisettrici di $\angle AED, \angle AFD$ rispettivamente.
Guardando il triangolo $\triangle ADE$ ricaviamo $2x + \alpha + \delta = 180$ da cui $x = \frac{\beta-\alpha}{2}$.
Osserviamo poi che $\angle CAD = \alpha - z$, $\angle BDC = z$ e quindi $\angle BDA = \delta - z$; dal triangolo $\triangle ADF$ otteniamo allora $\alpha - z + \delta - z + 2y = 180$ da cui $y - z = \frac{\beta-\alpha}{2} = x$.
Allora $\angle EPA = x + \delta$, mentre $\angle FQA = y + \delta - z$; usando $y - z = x$ abbiamo $\angle EPA = \angle FQA$ ovvero le due bisettrici sono parallele.



Sia O il centro della circoscritta di $ABCD$, e osserviamo quindi che X_1X_2 e Y_1Y_2 concorrono in O.

<u>Step 1:</u> $X_1Y_1Y_2X_2$, OAX_1Y_2, ODX_2Y_1 sono ciclici.
Dato che X_1X_2 è l'asse di AB, vale $\angle X_1X_2A + \angle X_2AB = 90$; similmente $\angle Y_2Y_1C + \angle Y_1CD = 90$.
Inoltre $\angle X_2AB = 180 - \angle BAD$ e $\angle CY_1Y_2 = 180 - \angle X_1Y_1Y_2$.
Ma allora $\angle X_1X_2Y_2 + \angle X_1Y_1Y_2 = 90 - \angle X_2AB + 180 - \angle CY_1Y_2 = 90 - (180 - \angle BAD) + 180 -$

$(90 - \angle Y_1CD) = \angle BAD + \angle BCD = 180$ per la ciclicità di $ABCD$.

Vediamo che $\angle X_1AY_2 = \angle BAD - \angle BAX_1 = \angle BAD - \angle ABC$ poiché X_1 sta sull'asse di AB e dunque $\triangle ABX_1$ è isoscele.
Invece $\angle X_1OY_2 = 180 - \angle OX_1Y_1 - \angle OY_1X_1 = 180 - \angle X_2X_1B - angleY_2Y_1C = 180 - (90 - \angle ABC) - (90 - \angle BCD) = \angle ABC + \angle BCD$.
Ma allora $\angle X_1AY_2 + \angle X_1AY_2 = \angle BAD + \angle BCD = 180$, ovvero AX_1OY_2 è ciclico.
Analogamente si vede che DY_1OX_2 è ciclico.

Siano ora $L = DI \cap DY_1OX_2$, $M = AJ \cap AX_1OY_2$.

Step 2: LM è la bisettrice esterna dell'angolo $\angle X_2OY_2$.
Osserviamo che $\angle LOX_2 = \angle LDX_2$; inoltre $\angle LDX_2 = \frac{1}{2}\angle ADY_1$, e poi $\angle ADY_1 = \angle ADC - \angle BCD$.
Analogamente $\angle MOY_2 = \frac{1}{2}\angle X_1AD$, con $\angle X_1AD = \angle BAD - \angle ABC$.
Notiamo allora che $\angle LOX_2 = \angle MOY_2$ per la ciclicità di $ABCD$. Inoltre vale $\angle LOX_2 + \angle MOY_2 + \angle X_2OY_2 = \frac{1}{2}(\angle ADC - \angle BCD + \angle BAD - \angle ABC) + \angle ABC + \angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD + \angle BAD +$
180. ovvero O, L, M sono allineati.

Siano $\omega_1 = \odot Y_1IX_2$, $\omega_2 = \odot X_1JY_2$; siano $N = X_2I \cap Y_2J$, $Z = X_1Y_2 \cap Y_1X_2$.

Step 3: $ZN \perp LM$.
Si nota che N sta sulla bisettrice di $\angle X_1Y_2X_2$ e su quella di $\angle Y_1X_2Y_2$: ma allora N è l'incentro del triangolo $\triangle ZX_2Y_2$, ovvero ZN è la bisettrice di X_2ZY_2.
Applicando ora il lemma 2 al quadrilatero ciclico $X_1Y_1Y_2X_2$ ricaviamo che ZN è parallelo alla bisettrice di $\angle X_2OY_2$; ma LM è la bisettrice esterna di questo angolo e dunque è perpendicolare alla bisettrice interna, e quindi anche a LM.

Step 4: I, J, X_2, Y_2 sono ciclici.
Osserviamo che $\text{pow}_{\omega_1}(Z) = ZX_2 \cdot ZY_1 = ZX_1 \cdot ZY_2 = \text{pow}_{\omega_2}(Z)$ grazie alla ciclicità di $X_2X_1Y_1Y_2$, per cui Z sta sull'asse radicale di ω_1, ω_2.
Grazie al lemma 1, sappiamo che L è il centro di ω_1 e M è il centro di ω_2; l'asse è perpendicolare alla congiungente dei centri, ovvero a LM; tuttavia l'asse passa anche per Z, quindi è esattamente la retta ZN.
Possiamo infine dire che $NI \cdot NX_2 = \text{pow}_{\omega_1}(N) = \text{pow}_{\omega_2}(N) = NJ \cdot NY_2$ poiché N ha la stessa potenza rispetto ad ω_1 e ω_2, ma allora il quadrilatero X_2JIY_2 è ciclico.

Scaletta di correzione

- 7 punti per chi svolge tutta la dimostrazione in modo corretto, anche se diverso da quello proposto.
- 1 punto per chi svolge lo Step 1.
- 2 punti per chi considera L, M e osserva che sono i centri di ω_1, ω_2.
- 1 punto per chi svolge lo Step 2.
- 2 punti per chi svolge lo Step 3, dimostrando il lemma 2.

- 1 punto per chi conclude, svolgendo lo Step 4.